LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN

BÀI 1: KIẾN THỨC CƠ SỞ

Phạm Xuân Cường
Khoa Công nghệ thông tin
cuongpx@tlu.edu.vn

Nội dung bài giảng

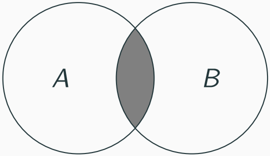
1. Tập hợp
2. Đồ thị, cây
3. Chuỗi và ngôn ngữ
4. Boolean Logic
5. Định nghĩa, định lý và chứng minh

Tập hợp

Tập hợp

- Tập hợp: Là tập các đối tượng không trùng lặp

  VD: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Biểu diễn:
  - Liệt kê: $D = \{a, b, c, d\}$
  - Mô tả đặc tính $D = \{x|$ x là một ngày trong tháng 9$\}$
  - Biểu đồ Venn:



Một số tập đặc biệt

- Tập rỗng: $\emptyset = \{\}$
- Tập hợp con: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (Ngược lại: $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$)

  $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

  $\{2, 4, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Tập bằng nhau: $\mathbf{A = B}$ (Ngược lại: $A \neq B$)

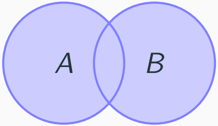
  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

  $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 1\}$
- Tập lũy thừa: $\mathbf{P(A)}$ hoặc $\mathbf{2^A}$

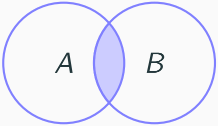
  $A = \{1, 2, 3\}$ thì $\mathbf{2^A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$

Các phép toán với tập hợp

- Phép hợp (Union): $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B \}$



- Phép giao (Intersection): $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ và } x \in B \}$



- Phần bù (Complement): $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$
- Tích Đề các: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ và } b \in B\}$
- Phép trừ: $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ nhưng } x \notin B \}$

Hàm (Functions)

- Hàm: là một ánh xạ từ miền xác định sang miền giá trị

$$\boldsymbol{f\text{:}\ D \rightarrow R}$$

  VD: f(x) = 2x + 5, $\forall$ x $\in$ R

- Hàm một ngôi: $\boldsymbol{f\text{:}\ D \rightarrow R}$
- Hàm hai ngôi: $\boldsymbol{f\text{:}\ A_1\ x\ A_2 \rightarrow R}$
  - Trung tố: a+b, a*b, a-b
  - Tiền tố: add(a,b), multiply(a,b), sub(a,b)
- Hàm k-ngôi: $\boldsymbol{f\text{:}\ A_1\ x\ A_2\ x\ ...\ x\ A_k \rightarrow R}$
- Vị từ (thuộc tính): $\boldsymbol{P\text{:}\ D \rightarrow \{True,\ False\}}$

  VD: even(4) = true, even(5) = false

Quan hệ

- Nếu **R** là một quan hệ hai ngôi $\Leftrightarrow$ $\mathbf{aRb = True}$
- Tương tự, Nếu **R** là một quan hệ k ngôi $\Leftrightarrow$ $\mathbf{R(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$ $\mathbf{= True}$
  VD: cho S = {0, 1, 2, 3}
  - Quan hệ "thứ tự nhỏ hơn"
    L = { (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3) }
  - Quan hệ "bằng"
    E = { (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)}
  - Quan hệ "chẵn hoặc lẻ"
    P = { (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1)}

Các tính chất của quan hệ

Quan hệ tương đương phải thỏa mãn:

- Phản xạ (reflexive): nếu **aRa** là đúng với $\forall$**a** $\in$ **S**
- Đối xứng (symmetric): nếu **aRb** $\Leftrightarrow$ **bRa**
- Bắc cầu (transitive): nếu **aRb** và **bRc** thì **aRc**

VD:

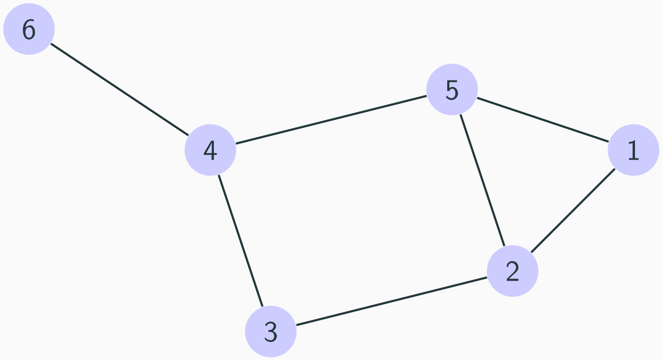
- L không là quan hệ **???**
- E là quan hệ **???**
- P là quan hệ **???**

Đồ thị, cây

Đồ thị (Graphs)

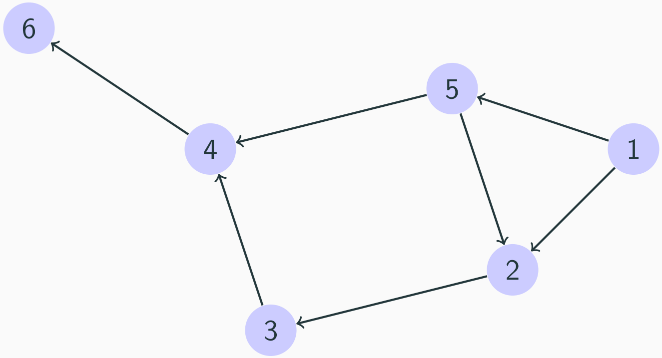
- Đồ thị (Ký hiệu G = (V,E)): là tập hợp các điểm cùng với các đường nối giữa các điểm đó

Đồ thị vô hướng:



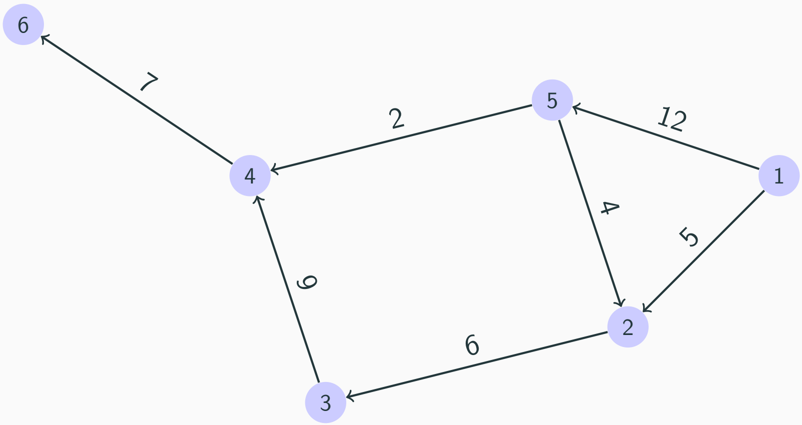
Đồ thị (Graphs)

Đồ thị có hướng:



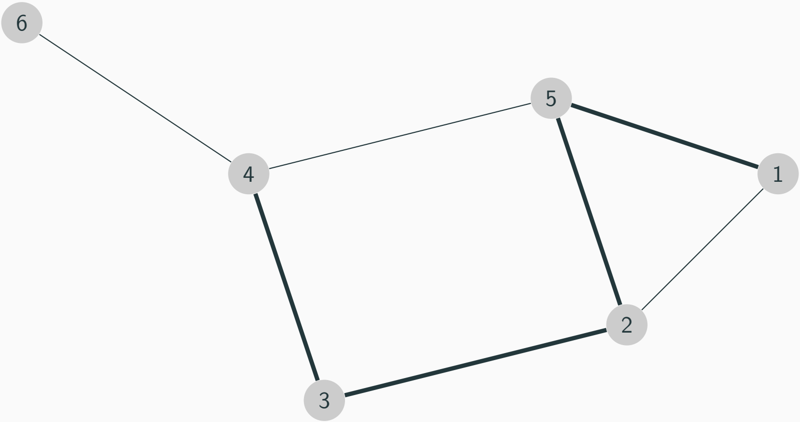
Đồ thị (Graphs)

Đồ thị có trọng số:



Đồ thị (Graphs)

Đồ thị con (Subgraphs):



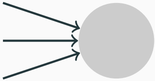
Đồ thị (Graphs)

- Đường đi (**path**): là dãy các đỉnh được nối với nhau bởi các cạnh
- Đường đi đơn: là **đường đi** mà nó không lặp lại bất cứ đỉnh nào
- Chu trình: là một đường đi mà **đỉnh bắt đầu** $\equiv$ **đỉnh kết thúc**
- Đồ thị là liên thông (**connected components**): $\exists$ đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ

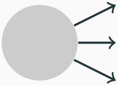
Đồ thị (Graphs)

Xét đồ thị có hướng G=(V,E)

Bán bậc vào



Bán bậc ra



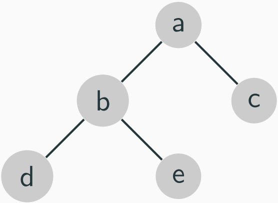
Quan hệ hai ngôi ≡ Đồ thị có hướng

R(a,b) = True

aRb

Cây (Trees)

- Cây (Trees) là một **đồ thi**
    - Không có chu trình
    - Có một nút gốc



Chuỗi và ngôn ngữ

Chuỗi (Strings)

- **Bộ chữ:** là tập hợp hữu hạn không rỗng các **ký hiệu**

  $\Sigma_1 = \{0,1\}$

  $\Sigma_2 = \{a,b,c,d\}$

  $\Gamma = \{0,1,a,b,c,d,x,y,z\}$

- **Chuỗi** (xâu): là một dãy hữu hạn các ký tự của bộ chữ, được viết liền và không bị ngăn cách bởi dấu phẩy

  baccada là một xâu trên Σ_2

- **Độ dài xâu**: Tổng số các ký hiệu có trong xâu

  Xâu w = baccada $\rightarrow |w| = |baccada| = 7$

- Xâu rỗng: là xâu có độ dài bằng 0 (Ký hiệu ε)
- Xâu nghịch đảo: là đảo ngược của xâu gốc (Ký hiệu w^R)

  w^R = adaccab

- Ghép xâu: x = cab, y = abcad $\rightarrow$ xy = cababcad

Ngôn ngữ (Language)

- **Ngôn ngữ**: là một tập các xâu

$$\mathbf{L_1} = \{\text{ab,bc,ca,da}\}$$

$$\mathbf{L_2} = \{\varepsilon, \text{ ab,abb,cabb,ddaca}\}$$

- Ngôn ngữ rỗng: $\{\} = \emptyset$
- Biểu diễn ngôn ngữ:
  - Liệt kê {ab,bc,ca,...}
  - Tập các ký hiệu: {x|x là các số chẵn}
  - Biểu thức chính quy (Regular Expression): c(ab)*(d|c)
  - Văn phạm phi ngữ cảnh (CFG)

Boolean Logic

Boolean Logic

Phép toán	Ký hiệu
And	$\wedge$
Or	$\vee$
Not	$\neg$
Xor	$\oplus$
Kéo theo	$\rightarrow$ hoặc $\Rightarrow$
Tương đương	$\Leftrightarrow$, $\equiv$ hoặc $=$

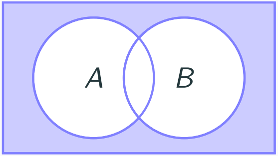
- Luật phân phối

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

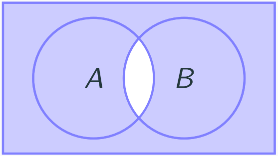
Boolean Logic

- Luật Demorgan

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$
$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$$



- Trên thực tế có thể biểu diễn tất cả các toán tử Boolean dưới dạng các toán tử **And** và **Not**

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$
$$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$
$$P \oplus Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

Định nghĩa, định lý và chứng minh

Định nghĩa, định lý và chứng minh

- **Định nghĩa:** là một mô tả về các đối tượng và khái niệm mà chúng ta sử dụng
- **Mệnh đề toán học:** là một mệnh đề được biểu diễn bằng các đối tượng toán học
- **Chứng minh:** là sự lập luận logic có sức thuyết phục rằng mệnh đề là đúng
- **Định lý:** là mệnh đề toán học đã được chứng minh là đúng

Định nghĩa, định lý và chứng minh

- **Bổ đề:** là một mệnh đề đúng có thể suy ra từ một định lý nào đó
- **Hệ quả:** Được suy ra khi chứng minh một định lý nào đó
- **Phỏng đoán:** là một mệnh đề có khả năng là đúng nhưng chưa được chứng minh
- **Khi và chỉ khi:** là một mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$
    - Cần chứng minh chiều thuận: $P \Rightarrow Q$
    - Chứng minh chiều ngược: $Q \Rightarrow P$

Các cách chứng minh

1. **Chứng minh bằng việc xây dựng**
   Định lý: $\exists$ x đặc biệt nào đó là nghiệm của bài toán
   Chứng minh: Chỉ ra cách xây dựng x
2. **Chứng minh bằng phản chứng**
   Định lý: "Mệnh đề P là đúng"
   Chứng minh:
   - Giả sử P là sai
   - Thực hiện một số thao tác logic
   - Dựa trên những tri thức đã có để kết luận giả thiết trên là phi lý

Các cách chứng minh

3. **Chứng minh bằng quy nạp**

   Định lý: "Mệnh đề P là đúng $\forall$ i $\geq$ 0"

   Chứng minh:

   <u>Bước cơ sở:</u>

   Chỉ ra P(0) là đúng

   <u>Bước quy nạp:</u>

   Giả sử P(i) là đúng $\rightarrow$ Giả thiết quy nạp

   Thực hiện biến đổi logic để chỉ ra P(i+1) là đúng

   Kết luận là P đúng $\forall$ i $\geq$ 0

Ví dụ về các cách chứng minh

1. **Chứng minh bằng việc xây dựng**
   Định lý: Nếu a và b là 2 số nguyên liên tiếp thì a+b là một số lẻ
   Chứng minh:
   - Vì a và b là 2 số nguyên liên tiếp $\rightarrow$ b = a + 1
   - a + b = a + a + 1 = 2a + 1
   - Mà 2a là số chẵn $\rightarrow$ 2a + 1 là số lẻ $\rightarrow$ a + b là số lẻ

Ví dụ về các cách chứng minh

2. **Chứng minh bằng phản chứng**

   Định lý: Nếu a và b là 2 số nguyên liên tiếp thì a+b là một số lẻ

   Chứng minh:

   - Giả sử a + b không phải là số lẻ $\rightarrow \nexists$ k: a + b = 2k + 1 (1)
   - Vì a và b là 2 số nguyên liên tiếp $\rightarrow$ a + b = 2a + 1 (2)
   - Từ (1) và (2) $\rightarrow$ Mâu thuẫn
   - Vậy giả thiết trên là sai $\rightarrow$ Định lý đã được chứng minh

Ví dụ về các cách chứng minh

3. **Chứng minh bằng quy nạp**
   Định lý: Nếu a và b là 2 số nguyên liên tiếp thì a+b là một số lẻ
   Chứng minh:
   Giả sử P(x) đúng khi tổng của x và số nguyên liên tiếp sau x là số lẻ

   Bước cơ sở:

   Chỉ ra $P(1) = 1 + 2 = 3$ là số lẻ $\rightarrow P(x) = \text{true}$ khi $x = 1$

   Bước quy nạp:

   Giả sử P(x) là đúng $\rightarrow P(x) = x + x + 1$ là số lẻ

   Tăng x và $x + 1$ lên 1 đơn vị: $(x+1) + (x+2) = P(x+1)$

   Do cộng thêm 2 đơn vị vào bất kỳ số nguyên nào cũng không làm thay đổi giá trị chẵn hoặc lẻ. Vì vậy P(x) là số lẻ $\rightarrow$ P(x+1) là số lẻ

   Kết luận là P đúng $\forall\ x \geq 1$

Questions?